冷轧轧制力数学模型的研究

武京伟，蔡玉强

（河北理工大学 机械工程学院，河北 唐山 063009）

摘要：通过对冷轧四辊轧机的实验分析，获得了轧制过程中的实际接触弧长。以卡尔曼单位压力微分方程与采利柯夫解为基础，并考虑轧辊弹性压扁，将实际接触区划分成不同的区域，根据不同区域的边界条件，建立了更准确的单位轧制压力的数学模型。

关键词：冷轧；轧辊弹性压扁；轧制力；数学模型

中图分类号：TG335.12 **文献标识码：**A

文章编号：1674-6457(2010)04-0012-03

Study of Mathematic Model of Cold Rolling Force

WU Jing-wei, *CAI Yu-qiang*

(Mechanical Engineering College, Hebei Polytechnic University, Tangshan 063009, China)

Abstract: Through the experimental analysis on the cold four-high mill the contact arc length in the strip cold rolling process is obtained. Based on the Karman differential equation and the answer of A. и. целов, and taking into account of the roll elastic flatness, the more accurate mathematic model of rolling force in different regions is set up according to the boundary conditions of different regions.

Key words: cold rolling; roll elastic flatness; roll force; mathematic model

为进一步提高冷轧带钢的产品质量和市场竞争力，需要对轧制过程的控制数学模型进行深入研究。特别是在冷轧时轧辊会发生严重的弹性压扁，使轧制力的计算设定值与实际值有较大的差异[1]。M. D. Stone 在建立轧制力公式时，把轧制过程近似视为两平行板之间的轧制，认为整个变形区都是塑性区，没有弹性区，由于实际轧制时存在轧辊的弹性压扁和轧件的弹性变形，因此该公式得到的轧制力与实际有误差，研究与实际轧制变形区几何形状相近的轧制力数学模型具有更重要的意义。

1 实际接触弧长度的确定

通过对冷轧四辊轧机的实验分析，结合相关文献可以发现在轧制过程中，轧辊将产生局部的弹性压缩变形，导致接触弧的几何形状发生变化，使接触弧长增加[2]。另外，轧件出辊后，轧件弹性恢复也会增大接触弧长。特别对于轧制薄板时，因单位压力较大，有时接触弧长可增加 30%～50%，因此轧辊和轧件的弹性压缩变形不能忽略。轧辊和轧件的弹性压缩对变形区长度的影响如图 1 所示[3]。

收稿日期：2010-05-18

作者简介：武京伟(1984—)，男，河北邯郸人，硕士研究生，主要研究方向为冷轧板形质量。

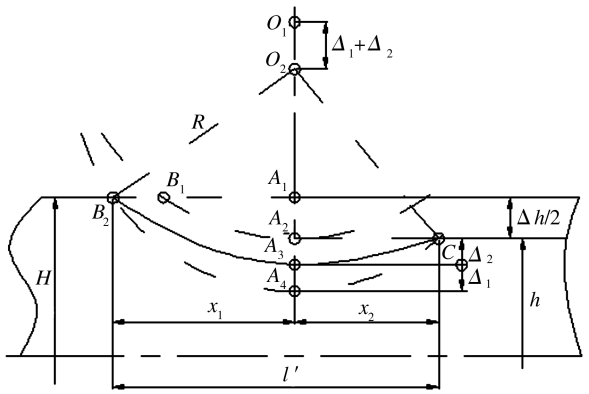

图 1　轧辊与轧件的弹性变形对变形区长度的影响

Fig. 1　Influence on the length of the deformation zone of the elastic deformation of roll and workpiece

由图 1 可知,由于轧辊的弹性压缩和轧件的弹性恢复,使轧件的出口断面由 A_2 向出口方向移动到 C 点,变形区长度增加。根据上述弹性变形,接触弧长度[4]变为:

$$l'=x_1+x_2$$
$$=\sqrt{R^2-(R-A_1A_4)^2}+\sqrt{R^2-(R-A_2A_4)^2} \tag{1}$$

展开上式,因为 A_1A_4 和 A_2A_4 的平方值比 R 要小得多,可以忽略,则

$$l'=x_1+x_2=\sqrt{2RA_1A_4}+\sqrt{2RA_2A_4} \tag{2}$$

又因为 $A_1A_4=\frac{\Delta h}{2}+\Delta_1+\Delta_2$,$A_2A_4=\Delta_1+\Delta_2$ 代入上式得:

$$l'=x_1+x_2$$
$$=\sqrt{2R\left(\frac{\Delta h}{2}+\Delta_1+\Delta_2\right)}+\sqrt{2R(\Delta_1+\Delta_2)}$$
$$=\sqrt{R\Delta h+x_2^2}+x_2 \tag{3}$$

式中:Δ_1——轧辊的弹性压缩值;

Δ_2——轧件局部的弹性压缩值;

υ_1,υ_2——轧辊与轧件的泊松系数;

E_1,E_2——轧辊与轧件的弹性模数。

Δ_1,Δ_2 可以从弹塑性理论中两圆柱体相互压缩时的计算公式求出:

$$\Delta_1=2q\frac{1-\upsilon_1{}^2}{\pi E_1};\ \Delta_2=2q\frac{1-\upsilon_2{}^2}{\pi E_2};q=2x_2\bar{p}$$

式中:$\bar{p}$——变形区的平均单位压力。

将 Δ_1 和 Δ_2 代入得

$$x_2=\sqrt{2R(\Delta_1+\Delta_2)}=8R\bar{p}\left(\frac{1-\upsilon_1{}^2}{\pi E_1}+\frac{1-\upsilon_2{}^2}{\pi E_2}\right) \tag{4}$$

将式(4)代入式(3),变形区的接触弧长为:

$$l'=\sqrt{R\Delta h+\left[8R\bar{p}\left(\frac{1-\upsilon_1{}^2}{\pi E_1}+\frac{1-\upsilon_2{}^2}{\pi E_2}\right)\right]^2}+8R\bar{p}\left(\frac{1-\upsilon_1{}^2}{\pi E_1}+\frac{1-\upsilon_2{}^2}{\pi E_2}\right) \tag{5}$$

2　轧制力数学模型建立

该方法在卡尔曼假设条件的基础上,考虑轧辊弹性压扁的情况下,利用 A. и 采利科夫的方法,建立轧制力数学模型。

Karman 单位压力平衡微分方程[5]:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\frac{K}{h_x}\times\frac{\mathrm{d}h_x}{\mathrm{d}x}\pm\frac{2t}{h_x}=0\quad(t=fp) \tag{6}$$

式中:取“+”时为后滑区;取“−”时为前滑区。

2.1　x_1 区单位压力的计算[6]

在 x_1 区,利用以弦代弧的方法,设 A_3B_2 的方程为 $y=ax+b$,即$\frac{h_x}{2}=ax+b$。

边界条件:在 A_3 点,$x=0$,$y=\frac{h}{2}-\Delta_2$;在 B_2 点,$x=x_1$,$y=\frac{H}{2}$。由此求出,$a=\frac{\Delta h+2\Delta_2}{2x_1}$,$b=\frac{h}{2}-\Delta_2$。

则
$$\frac{h_x}{2}=\left(\frac{\Delta h+2\Delta_2}{2x_1}\right)x+\frac{h}{2}-\Delta_2 \tag{7}$$

将式(7)微分得:$\mathrm{d}x=\frac{x_1\mathrm{d}h_x}{\Delta h+2\Delta_2}$　(8)

将式(8)代入卡尔曼微分方程(6),整理后得:

$$\mathrm{d}p+\frac{\mathrm{d}h_x}{h_x}\left[\pm\frac{2fpx_1}{\Delta h+2\Delta_2}-K\right]=0 \tag{9}$$

令 $\xi=\frac{2fx_1}{\Delta h+2\Delta_2}$,则式(9)变为:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\pm\xi p-K}=-\frac{\mathrm{d}h_x}{h_x} \tag{10}$$

式中:“+”为后滑区;“−”为前滑区。

积分后得:

即　后滑区为:$\frac{1}{\xi}\ln(\xi p-K)=\ln\frac{1}{h_x}+C_H$　(11)

前滑区为:$\frac{1}{\xi}\ln(\xi p+K)=\ln h_x+C_h$　(12)

在入辊处 $h_x=H$，$p=K-q_H=k\left(1-\frac{q_H}{K}\right)$（$q_H$ 为带材的后张应力），将入口处边界条件代入式(11)得：

$$C_H=\frac{1}{\xi}\ln\left[\xi\left(1-\frac{q_H}{K}\right)K-K\right]-\ln\frac{1}{H} \tag{13}$$

将 C_H 代入式(11)得：

$$\frac{1}{\xi}\ln\left[\frac{\xi p-K}{\xi K\left(1-\frac{q_H}{K}\right)-K}\right]=\ln\frac{H}{h_x}$$

最后整理得，后滑区单位压力公式为：

$$p_H=\frac{K}{\xi}\left\{\left(\frac{H}{h_x}\right)^{\xi}\left[\xi\left(1-\frac{q_H}{K}\right)-1\right]+1\right\} \tag{14}$$

式(12)中的 C_h 可由 2.3 节确定。

2.2 在 x_2 区单位压力的确定

x_2 区为弹性恢复区，可视为前滑区，采用以弦代弧的方法，来计算弹性区的轧制力。设 A_3C 的方程：$y=cx+d$，即$\frac{h_x}{2}=cx+d$。

边界条件：在 A_3 点，$x=0$，$y=\frac{h}{2}-\Delta_2$；在 C 点，$x=x_2$，$y=\frac{h}{2}$；由此求出，$c=\frac{\Delta_2}{x_2}$，$d=\frac{h}{2}-\Delta_2$。

则 $$\frac{h_x}{2}=\frac{\Delta_2}{x_2}x+\left(\frac{h}{2}-\Delta_2\right) \tag{15}$$

将式(15)微分得：

$$\mathrm{d}x=\frac{x_2}{2\Delta_2}\mathrm{d}h_x \tag{16}$$

将式(16)代入卡尔曼微分方程(6)，整理后得：

$$\mathrm{d}p-\frac{\mathrm{d}h_x}{h_x}\left(\frac{fpx_2}{\Delta_2}+K\right)=0 \tag{17}$$

令 $\xi=\frac{fx_2}{\Delta_2}$，则式(17)变为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{K+\xi p}=\frac{\mathrm{d}h_x}{h_x} \tag{18}$$

积分式(18)得：$\frac{1}{\xi}\ln(K+\xi p)=\ln h_x+C_t$ (19)

将出口处的边界条件：$x=x_2$，$h_x=h$，$p=K-q_h=K\left(1-\frac{q_h}{K}\right)$（$q_h$ 为带材的前张应力），代入式(19)得：

$$C_t=\frac{1}{\xi}\ln\left[K+K\xi\left(1-\frac{q_h}{K}\right)\right]-\ln h \tag{20}$$

将 C_t 代入式(19)得：

$$\frac{1}{\xi}\ln(K+\xi p)=\ln\left(\frac{h_x}{h}\right)+\frac{1}{\xi}\ln\left[K+K\xi\left(1-\frac{q_h}{K}\right)\right]$$

最后整理得弹性区单位压力公式：

$$p_t=\frac{K}{\xi}\left\{\left(\frac{h_x}{h}\right)^{\xi}\left[1+\xi\left(1-\frac{q_h}{K}\right)\right]-1\right\} \tag{21}$$

2.3 前滑区单位压力公式的确定

边界条件：$x=0$，$h_x=h-2\Delta_2$，并且 $p_h=p_t$，联立式(12)，(21)求得：

$$C_h=\frac{1}{\xi}\ln\left[\left(\frac{1}{h}\right)^{\xi}[K(1+\xi)-\xi q_h]\right] \tag{22}$$

将式(22)代入式(12)最后求得前滑区单位压力公式为：

$$p_h=\frac{1}{\xi}\left\{\left(\frac{h_x}{h}\right)^{\xi}[K(1+\xi)-\xi q_h]-K\right\} \tag{23}$$

2.4 中性点位置的确定

由中性面定义[7]，令 $p_H=p_h$，便可求出中性面的高度 h_r。即应满足下面两式。

$$p_h=\frac{1}{\xi}\left\{\left(\frac{h_x}{h}\right)^{\xi}[K(1+\xi)-\xi q_h]-K\right\}$$

$$p_H=\frac{K}{\xi}\left\{\left(\frac{H}{h_x}\right)^{\xi}\left[\xi\left(1-\frac{q_H}{K}\right)-1\right]+1\right\}$$

2.5 轧制力的确定

单位宽度轧制力计算公式如下：

$$p=\int_{h_r}^{\frac{H}{2}}p_H\mathrm{d}h_x+\int_0^{h_r}p_h\mathrm{d}h_x+\int_0^{\frac{h}{2}}p_t\mathrm{d}h_x \tag{24}$$

平均单位轧制力：

$$\bar{p}=\frac{p}{l'} \tag{25}$$

3 结语

在考虑轧辊弹性压扁的情况下，通过将轧制变形区划分为不同的区域，利用各自区域的边界条件，建立轧制力数学模型。与 M. D. Stone 研究的单位压力公式相比，该轧制力模型更加符合实际轧制情况，因此该模型具有一定的理论意义，对于制定轧制规程及现代冷轧机设计具有重要实用价值。

参考文献：

[1] 王军生，白金兰，刘相华. 带钢冷连轧原理与过程控制[M]. 北京：科学出版社，2008：162－171.

[2] 傅祖铸. 有色金属板带材生产[M]. 长沙：中南大学出版社，2009：32－38.

（下转第 26 页）

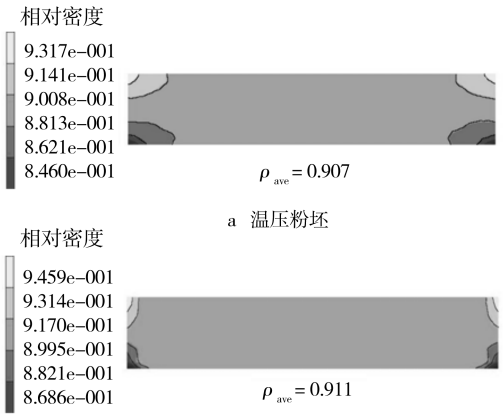

图 6 轴截面相对密度分布切片

Fig. 6 Slice of relative density of axis section

接近。上端面边缘处的相对密度最高，而下端面边缘处的相对密度最低，中心部位相对密度基本没有变化，可视为压透。温压扭粉坯轴截面相对密度分布如图 6b 所示，温压扭粉坯平均相对密度得到提高，上下端面边缘相对密度梯度较大的区域已大为减小，相对密度分布显著改善。

4 结语

1）压扭工艺可以改变粉末坯料表面受力状态，使端面边缘处相对密度梯度减小，中心相对密度均匀的面积扩大。

2）温压扭成形过程中，侧壁附近粉末受摩擦传递的剪切力作用明显，变形量较压制工艺有明显增大。

3）压扭工艺可以提高粉坯平均相对密度，并显著改善相对密度分布。

参考文献：

[1] 罗振中. 钼的应用及其发展[J]. 中国钼业，2003，27(2)：7－10.

[2] 李健. 钼粉末温压成形过程的有限元数值模拟研究[D]. 陕西：西北工业大学，2007.

[3] 李元元，肖志瑜，倪东惠，等. 温压成形技术的研究进展[J]. 华南理工大学学报，2002，30(11)：15－20.

[4] 王德广，周瑞庭，解挺，等. 粉末温压成形过程中的力学行为[J]. 机械工程材料，2007，31(5)：66－68.

[5] 薛克敏，张君，李萍，等. 高压扭转法的研究现状及展望[J]. 合肥工业大学学报，2008，31(10)：1613－1616.

[6] 赵伟斌. 金属粉末温压成形的力学建模和数值模拟[D]. 广州：华南理工大学，2005.

[7] 陈火红. 新编 Marc 有限元实例教程[M]. 北京：机械工业出版社，2007.

[8] SHIMA S, OYANE M. Plasticity Theory for Porous Metals [J]. Int J Mech Sci, 1976, 18: 285－292.

[9] 汪俊. 粉末金属成形过程建模及成形工艺计算机仿真[D]. 上海：上海交通大学，1999.

（上接第 14 页）

[3] 赵志业. 金属塑性变形与轧制理论[M]. 北京：冶金工业出版社，2004：108－112.

[4] 于秋林，连家创. 冷轧薄板轧制变形区长度计算[J]. 东北重型机械学院学报，1989，13(4)：48－55.

[5] 陆济民. 轧制原理[M]. 北京：冶金工业出版社，1993：175－179.

[6] WANG J S, JIANG Z Y, TIEU A K. Adaptive Calculation of Deformation Resistance Model of Online Process Control in Tandem Cold Mill[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2005, 162: 585－590.

[7] 周富强，曹建国，张杰，等. 冷连轧机轧制力的影响因素[J]. 机械工程学报，2007，43(10)：94－97.